Άσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{-6x^2+7x-2}{3x^2-2x}, & x\neq 0 \text{ και } x\neq \dfrac{2}{3}\\[2mm] \alpha, & x=\dfrac{2}{3}\end{cases}.$$

Βρείτε το $\alpha\in\mathbb{R}$, ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0=\dfrac{2}{3}$.

Λύση

$$f \text{ συνεχής στο } x_0=\frac{2}{3} \Leftrightarrow \lim_{x\to\frac{2}{3}} f(x)=f\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to\frac{2}{3}}\frac{-6x^2+7x-2}{3x^2-2x}=\alpha$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to\frac{2}{3}}\frac{-(2x-1)\cancel{(3x-2)}}{x\cancel{(3x-2)}}=\alpha$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to\frac{2}{3}}\frac{-(2x-1)}{x}=\alpha$$

$$\Leftrightarrow \alpha=\frac{-\left(2\cdot\frac{2}{3}-1\right)}{\frac{2}{3}}$$

$$\Leftrightarrow \alpha=\frac{-\left(\frac{4}{3}-1\right)}{\frac{2}{3}}$$

$$\Leftrightarrow \alpha=-\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}$$

$$\Leftrightarrow \alpha=-\frac{1}{2}$$

$-6x^2+7x-2$

$\alpha=-6 \qquad \Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$

$\beta=7 \qquad\quad =7^2-4(-6)(-2)$

$\gamma=-2 \qquad =49-48$

$\qquad\qquad\quad =1$

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-7\pm\sqrt{1}}{2(-6)}=\frac{-7\pm1}{-12}$$

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{-7+1}{-12}=\dfrac{-6}{-12}=\dfrac{1}{2}\\[2mm] x_2=\dfrac{-7-1}{-12}=\dfrac{-8}{-12}=\dfrac{2}{3}\end{cases}$$

Συνεπώς, $-6x^2+7x-2=-6\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\left(x-\dfrac{2}{3}\right)$

$$=-(2x-1)(3x-2)$$

Άσκηση 2

Για $x>0$ θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{-2x^2-3x+2}{1-\sqrt{2x}}, & x\neq \dfrac{1}{2}\\ \alpha, & x=\dfrac{1}{2}\end{cases}.$$

Βρείτε το $\alpha\in\mathbb{R}$, ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0=\dfrac{1}{2}$.

Λύση

$$\begin{aligned}
f \text{ συνεχής στο } x_0=\frac{1}{2} &\Leftrightarrow \lim_{x\to\frac{1}{2}} f(x)=f\left(\frac{1}{2}\right)\\
&\Leftrightarrow \lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{-2x^2-3x+2}{1-\sqrt{2x}}=\alpha\\
&\Leftrightarrow \lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{-(x+2)(2x-1)\left(1+\sqrt{2x}\right)}{\left(1-\sqrt{2x}\right)\left(1+\sqrt{2x}\right)}=\alpha\\
&\Leftrightarrow \lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{-(x+2)(2x-1)\left(1+\sqrt{2x}\right)}{1^2-\left(\sqrt{2x}\right)^2}=\alpha\\
&\Leftrightarrow \lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{(x+2)\cancel{(1-2x)}\left(1+\sqrt{2x}\right)}{\cancel{1-2x}}=\alpha\\
&\Leftrightarrow \lim_{x\to\frac{1}{2}}(x+2)\left(1+\sqrt{2x}\right)=\alpha\\
&\Leftrightarrow \alpha=\left(\frac{1}{2}+2\right)\left(1+\sqrt{2\cdot\frac{1}{2}}\right)\\
&\Leftrightarrow \alpha=\frac{5}{2}\cdot 2\\
&\Leftrightarrow \alpha=5
\end{aligned}$$

$-2x^2-3x+2$

$\alpha=-2 \qquad \Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$

$\beta=-3 \qquad\quad =(-3)^2-4(-2)2$

$\gamma=2 \qquad\quad\ =9+16$

$\qquad\qquad\quad\ =25$

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{3\pm\sqrt{25}}{2(-2)}=\frac{3\pm5}{-4}$$

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{3+5}{-4}=\dfrac{8}{-4}=-2\\ x_2=\dfrac{3-5}{-4}=\dfrac{-2}{-4}=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

Συνεπώς, $-2x^2-3x+2=-2(x+2)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$

$$=-(x+2)(2x-1)$$

Άσκηση 3

Για $x>0$ θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{-3x^2+26x-16}{4-\sqrt{2x}}, & x\neq 8\\ \alpha, & x=8\end{cases}.$$

Βρείτε το $\alpha\in\mathbb{R}$, ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0=8$. Δίνεται ότι $22^2=484$.

Λύση

$$\begin{aligned}
f \text{ συνεχής στο } x_0=8 &\Leftrightarrow \lim_{x\to 8} f(x)=f(8)\\
&\Leftrightarrow \lim_{x\to 8}\frac{-3x^2+26x-16}{4-\sqrt{2x}}=\alpha\\
&\Leftrightarrow \lim_{x\to 8}\frac{-(3x-2)(x-8)\left(4+\sqrt{2x}\right)}{\left(4-\sqrt{2x}\right)\left(4+\sqrt{2x}\right)}=\alpha\\
&\Leftrightarrow \lim_{x\to 8}\frac{-(3x-2)(x-8)\left(4+\sqrt{2x}\right)}{4^2-\left(\sqrt{2x}\right)^2}=\alpha\\
&\Leftrightarrow \lim_{x\to 8}\frac{-(3x-2)(x-8)\left(4+\sqrt{2x}\right)}{16-2x}=\alpha\\
&\Leftrightarrow \lim_{x\to 8}\frac{\cancel{-}(3x-2)\,\cancel{(x-8)}\left(4+\sqrt{2x}\right)}{2\cancel{(8-x)}}=\alpha\\
&\Leftrightarrow \lim_{x\to 8}\frac{(3x-2)\left(4+\sqrt{2x}\right)}{2}=\alpha\\
&\Leftrightarrow \alpha=\frac{(3\cdot 8-2)\left(4+\sqrt{2\cdot 8}\right)}{2}\\
&\Leftrightarrow \alpha=\frac{22\cdot 8}{2}\\
&\Leftrightarrow \alpha=88
\end{aligned}$$

$-3x^2+26x-16$

$\alpha=-3$ $\quad\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$

$\beta=26$ $\quad=26^2-4(-3)(-16)$

$\gamma=-16$ $\quad=676-192$

$=484$

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-26\pm\sqrt{484}}{2(-3)}=\frac{-26\pm 22}{-6}$$

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{-26+22}{-6}=\dfrac{-4}{-6}=\dfrac{2}{3}\\[2mm] x_2=\dfrac{-26-22}{-6}=\dfrac{-48}{-6}=8\end{cases}$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned}-3x^2+26x-16&=-3\left(x-\frac{2}{3}\right)(x-8)\\&=-(3x-2)(x-8)\end{aligned}$$

Άσκηση 4

Για $x>0$ θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{-5x^2-x+18}{3-\sqrt{5x}}, & x\neq\dfrac{9}{5}\\ \alpha, & x=\dfrac{9}{5}\end{cases}.$$

Βρείτε το $\alpha\in\mathbb{R}$, ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0=\dfrac{9}{5}$. Δίνεται ότι $19^2=361$.

Άσκηση 5

Για $x>0$ θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{-4x^2+6x+54}{6-\sqrt{8x}}, & x\neq\dfrac{9}{2}\\ \alpha, & x=\dfrac{9}{2}\end{cases}.$$

Βρείτε το $\alpha\in\mathbb{R}$, ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0=\dfrac{9}{2}$. Δίνεται ότι $30^2=900$.