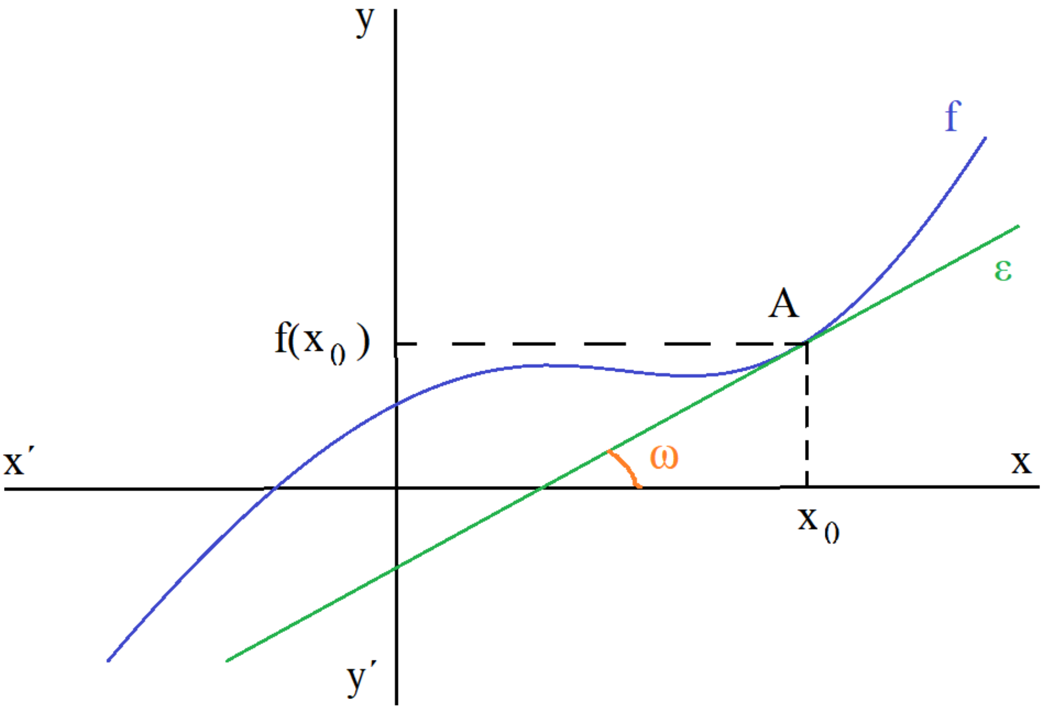
Μεθοδολογία υπολογισμού εξίσωσης εφαπτομένης της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης *f* σε ένα σημείο της Α

<u>*Δεδομένα*</u>: η συνάρτηση *f* και η τετμημένη x_0 του σημείου Α.
<u>*Ζητούμενα*</u>: η εξίσωση της εφαπτομένης $\varepsilon : y = \alpha x + \beta$ και συγκεκριμένα ζητάμε τα α και β.



1ο βήμα) Υπολογίζουμε την τεταγμένη $f(x_0)$ του $\mathrm{A}(x_0, f(x_0))$.

2ο βήμα) Υπολογίζουμε τον συντελεστή διεύθυνσης α της ευθείας ε:
Βρίσκουμε την παράγωγο $f'(x)$ της συνάρτησης f και στη συνέχεια την τιμή της $f'(x_0)$, η οποία ισούται με το α. Είναι δηλ. $\alpha = f'(x_0)$.

3ο βήμα) Αντικαθιστούμε το α στην ε και παίρνουμε

$$\varepsilon : y = f'(x_0)x + \beta$$

4ο βήμα) Υπολογίζουμε το β:
Το σημείο Α ανήκει στη γραφική παράσταση της ευθείας ε, άρα οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν την εξίσωσή της

$$\mathrm{A}(x_0, f(x_0)) \in C_\varepsilon \Leftrightarrow f(x_0) = f'(x_0)x_0 + \beta \Leftrightarrow \beta = f(x_0) - f'(x_0)x_0$$

5ο βήμα) Αντικαθιστούμε την τιμή του β στην εξίσωση της εφαπτομένης και τελειώσαμε

$$\varepsilon : y = \underbrace{f'(x_0)}_{\alpha}x + \underbrace{f(x_0) - f'(x_0)x_0}_{\beta}$$

Σημειώσεις

1) Αν γνωρίζουμε τη γωνία ω που σχηματίζει η εφαπτομένη με τον οριζόντιο άξονα (x΄x), τότε $\alpha = \varepsilon\varphi\omega = f'(x_0)$.
2) Αν δύο ευθείες είναι παράλληλες, τότε έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης. Δηλαδή αν $\varepsilon_1 : y = \alpha_1 x + \beta_1$ και $\varepsilon_2 : y = \alpha_2 x + \beta_2$ και $\varepsilon_1 // \varepsilon_2 \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2$.
3) Αν δύο ευθείες είναι κάθετες, τότε το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσης τους ισούται με μείον ένα. Δηλαδή αν $\varepsilon_1 : y = \alpha_1 x + \beta_1$ και $\varepsilon_2 : y = \alpha_2 x + \beta_2$ και $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow \alpha_1 \cdot \alpha_2 = -1$.

Άσκηση

Να υπολογίσετε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$$f(x) = \sqrt{x + 1 - \eta\mu x}, \quad x \in [0, \pi]$$

στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

Λύση

Η εξίσωση της εφαπτομένης ε θα είναι της μορφής $y = \alpha x + \beta$

1ο βήμα) $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \sqrt{\dfrac{\pi}{2} + 1 - \eta\mu\dfrac{\pi}{2}} = \sqrt{\dfrac{\pi}{2} + 1 - 1} = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$. Συνεπώς, το σημείο επαφής της f και της εφαπτομένης της ε είναι το $\mathrm{A}\left(\dfrac{\pi}{2}, \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\right)$.

2ο βήμα) $f'(x) = \left(\sqrt{x + 1 - \eta\mu x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x + 1 - \eta\mu x}}(x + 1 - \eta\mu x)' = \dfrac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{2\sqrt{x + 1 - \eta\mu x}}$

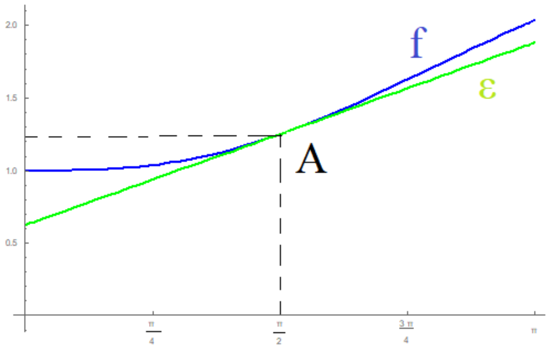
$$\alpha = f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}}{2\sqrt{\frac{\pi}{2} + 1 - \eta\mu\frac{\pi}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{\pi}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

3ο βήμα) $\varepsilon : y = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} x + \beta$

4ο βήμα)

$$\mathrm{A}\left(\frac{\pi}{2}, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) \in C_\varepsilon \Leftrightarrow \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\pi}{2} + \beta \Leftrightarrow \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} + \beta \Leftrightarrow \beta = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

5^o *βήμα)* Τελικά $\varepsilon: y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}x + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$



Βιβλίο Άσκηση 8 σελ. 38

Λύση

$f(x) = 2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x$

Η εξίσωση της εφαπτομένης ε θα είναι της μορφής $y = \alpha x + \beta$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\eta\mu\frac{\pi}{3}\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} = \cancel{2}\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Άρα το σημείο επαφής είναι το $A\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

$$f'(x) = (2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x)' = 2\left[(\eta\mu x)'\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x(\sigma\upsilon\nu x)'\right] = 2\left(\sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu^2 x\right)$$

$$\alpha = f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{3} - \eta\mu^2\frac{\pi}{3}\right) = -1$$

Άρα $\varepsilon: y = -x + \beta$

$$A\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \in C_\varepsilon \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\pi}{3} + \beta \Leftrightarrow \beta = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3}$$

Τελικά $\varepsilon: y = -x + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3}$

Άσκηση

Να υπολογίσετε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$$f(x) = x^5 - 3x^2 + 4$$

στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 1$.

Λύση

Η εξίσωση της εφαπτομένης ε θα είναι της μορφής $y=\alpha x+\beta$.

$f(1)=1^5-3\cdot 1^2+4=2$

Άρα το σημείο επαφής είναι το $\mathrm{A}(1,2)$.

$f'(x)=\left(x^5-3x^2+4\right)'=5x^4-6x$

$\alpha=f'(1)=5\cdot 1^4-6\cdot 1=-1$

Άρα $\varepsilon: y=-x+\beta$

$\mathrm{A}(1,2)\in C_\varepsilon \Leftrightarrow 2=-1+\beta \Leftrightarrow \beta=3$

Τελικά $\varepsilon: y=-x+3$

Άσκηση

Να υπολογίσετε την εξίσωση της εφαπτομένης ε της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$$f(x)=\frac{2}{3}\eta\mu x,\quad x\in(0,\pi),$$

αν γνωρίζουμε ότι σχηματίζει γωνία $\dfrac{\pi}{6}$ με τον άξονα x΄x.

Λύση

Η εξίσωση της εφαπτομένης ε θα είναι της μορφής $y=\alpha x+\beta$

$\alpha=\varepsilon\varphi\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Άρα $\varepsilon: y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+\beta$

$f'(x)=\left(\dfrac{2}{3}\eta\mu x\right)'=\dfrac{2}{3}\sigma\upsilon\nu x$

$\Rightarrow \dfrac{2}{3}\sigma\upsilon\nu x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow \sigma\upsilon\nu x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow x=\dfrac{\pi}{6}$

$f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{2}{3}\eta\mu\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{3}$

Άρα το σημείο επαφής είναι το $\mathrm{A}\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{1}{3}\right)$.

$\mathrm{A}\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{1}{3}\right)\in C_\varepsilon \Leftrightarrow \dfrac{1}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\cdot\dfrac{\pi}{6}+\beta \Leftrightarrow \beta=\dfrac{6-\pi\sqrt{3}}{18}$

Τελικά $\varepsilon: y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+\dfrac{6-\pi\sqrt{3}}{18}$

Άσκηση

Να υπολογίσετε την εξίσωση της εφαπτομένης ε της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$$f\left(x\right)=x+\frac{4}{x},$$

αν γνωρίζουμε ότι ε//x΄x.

Λύση

Η εξίσωση της εφαπτομένης ε θα είναι της μορφής $y=\alpha x+\beta$

$\varepsilon//x'x \Leftrightarrow \omega=0$

$\alpha=\varepsilon\varphi 0=0$

Άρα $\varepsilon: y=\beta$

$f'\left(x\right)=\left(x+\dfrac{4}{x}\right)'=1-\dfrac{4}{x^2}$

$\Rightarrow 1-\dfrac{4}{x^2}=0 \Leftrightarrow \dfrac{4}{x^2}=1 \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow x=\pm 2$

Άρα το σημείο επαφής είναι το $\mathrm{A}\left(2,f\left(2\right)\right)$ ή $\mathrm{B}\left(-2,f\left(-2\right)\right)$, δηλ. $\mathrm{A}\left(2,4\right)$ και $\mathrm{B}\left(-2,-4\right)$.

Άρα έχω δύο εφαπτομένες τις $\varepsilon_1: y=4$ και $\varepsilon_2: y=-4$.

Άσκηση

Βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$$f\left(x\right)=x^3-3x+5,$$

οι οποίες είναι:

α) παράλληλες με την ευθεία $y=9x-1$ και

β) κάθετες με την ευθεία $y=\dfrac{4}{3}x+1$.

Λύση

$f'\left(x\right)=\left(x^3-3x+5\right)'=3x^2-3=3\left(x^2-1\right)$

α) Πρέπει $f'\left(x\right)=9 \Leftrightarrow \dfrac{3\left(x^2-1\right)}{3}=\dfrac{9}{3} \Leftrightarrow x^2-1=3 \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow x=\pm 2$

Άρα έχω να υπολογίσω τις εφαπτομένες στα σημεία $\mathrm{A}\left(2,f\left(2\right)\right)$ ή $\mathrm{B}\left(-2,f\left(-2\right)\right)$, δηλ. $\mathrm{A}\left(2,7\right)$ και $\mathrm{B}\left(-2,3\right)$.

Όμως η εφαπτομένη είναι της μορφής $\varepsilon: y=9x+\beta$.

Για το σημείο $\mathrm{A}\left(2,7\right)$ έχω $7=9\cdot 2+\beta \Leftrightarrow \beta=-11$. Άρα $\varepsilon_1: y=9x-11$

Για το σημείο $\mathrm{B}\left(-2,3\right)$ έχω $3=9\cdot\left(-2\right)+\beta \Leftrightarrow \beta=21$. Άρα $\varepsilon_2: y=9x+21$

β) Πρέπει $f'(x)\cdot\frac{4}{3}=-1\Leftrightarrow \cancel{3}\left(x^2-1\right)\cdot\frac{4}{\cancel{3}}=-1\Leftrightarrow 4\left(x^2-1\right)=-1\Leftrightarrow x^2=\frac{3}{4}\Leftrightarrow x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

Άρα έχω να υπολογίσω τις εφαπτομένες στα σημεία $\Gamma\left(\frac{\sqrt{3}}{2},f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$ ή $\Delta\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$, δηλ. $\Gamma\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{9\sqrt{3}}{8}+5\right)$ και $\Delta\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{9\sqrt{3}}{8}+5\right)$.

Όμως η εφαπτομένη είναι της μορφής $\varepsilon: y=-\frac{3}{4}x+\beta$.

Για το σημείο $\Gamma\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{9\sqrt{3}}{8}+5\right)$ έχω

$-\frac{9\sqrt{3}}{8}+5=-\frac{3}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\beta\Leftrightarrow \beta=-\frac{9\sqrt{3}}{8}+5+\frac{3\sqrt{3}}{8}\Leftrightarrow \beta=-\frac{6\sqrt{3}}{8}+5$. Άρα

$\varepsilon_1: y=-\frac{3}{4}x-\frac{6\sqrt{3}}{8}+5$

Για το σημείο $\Delta\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{9\sqrt{3}}{8}+5\right)$ έχω

$\frac{9\sqrt{3}}{8}+5=-\frac{3}{4}\cdot\frac{-\sqrt{3}}{2}+\beta\Leftrightarrow \beta=\frac{9\sqrt{3}}{8}+5-\frac{3\sqrt{3}}{8}\Leftrightarrow \beta=\frac{6\sqrt{3}}{8}+5$. Άρα

$\varepsilon_2: y=-\frac{3}{4}x+\frac{6\sqrt{3}}{8}+5$

Άσκηση

Η ευθεία $\varepsilon: y=-3x-4$ εφάπτεται στη συνάρτηση

$$f(x)=\alpha x^3+\beta x^2+9x-12,\quad \text{με } \alpha,\beta\in\mathbb{R},$$

στο σημείο $\mathrm{A}\left(2,f(2)\right)$.

Α) Βρείτε τους αριθμούς *α* και *β*.

Β) Να μελετήσετε την *f* ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Γ) Να συγκρίνετε τους αριθμούς:

α) $\left(\sqrt{2}\right)^3+9\sqrt{2}-24$ και $\left(\sqrt{3}\right)^3+9\sqrt{3}-30$

β) $f(\pi)$ και $f\left(\sqrt{17}\right)$

γ) $k=\frac{1}{\pi^3}-\frac{6}{\pi^2}+\frac{9}{\pi}-12$ και $\ell=\frac{1}{\left(\sqrt{17}\right)^3}-\frac{6}{\left(\sqrt{17}\right)^2}+\frac{9}{\sqrt{17}}-12$.

Λύση

Α)

Το πεδίο ορισμού της *f* είναι το $\mathrm{A}=\mathbb{R}$.

$\mathrm{A}\left(2, f(2)\right)\in C_{\varepsilon} \Leftrightarrow f(2)=-3\cdot 2-4 \Leftrightarrow f(2)=-10$ άρα $\mathrm{A}(2,-10)$ και

$f(2)=-10 \Leftrightarrow \alpha\cdot 2^3+\beta\cdot 2^2+9\cdot 2-12=-10$

$\Leftrightarrow 8\alpha+4\beta=-16 \Leftrightarrow 2\alpha+\beta=-4$

$f'(x)=3\alpha x^2+2\beta x+9$

Αφού η *ε* είναι εφαπτομένη της C_f στο $\mathrm{A}(2,-10)$, θα πρέπει

$f'(2)=-3 \Leftrightarrow 3\alpha\cdot 2^2+2\beta\cdot 2+9=-3$

$\Leftrightarrow 12\alpha+4\beta=-12 \Leftrightarrow 3\alpha+\beta=-3$

Έχουμε να λύσουμε το σύστημα

$$\begin{cases} 2\alpha+\beta=-4 \\ 3\alpha+\beta=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha+\cancel{\beta}=-4 \\ -3\alpha\cancel{-\beta}=3 \end{cases}$$
$$\overline{\quad -\alpha=-1 \quad}$$

Άρα $\alpha=1$ και $2\cdot 1+\beta=-4 \Leftrightarrow \beta=-6$

Β) $f(x)=x^3-6x^2+9x-12$

$f'(x)=3x^2-12x+9$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-12x+9=0 \Leftrightarrow x^2-4x+3=0$

$\Delta=4>0$, $x_1=1$, $x_2=3$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$		↗	$f(1)$ Τ.Μ.	↘	$f(3)$ Τ.Ε.	↗	

$f\nearrow(-\infty,1]$, $f\searrow[1,3]$, $f\nearrow[3,+\infty)$

Στο x=1 έχουμε τοπικό μέγιστο το $f(1)=1^3-6\cdot 1^2+9\cdot 1-12=-8$.

Στο x=3 έχουμε τοπικό ελάχιστο το $f(3)=3^3-6\cdot 3^2+9\cdot 3-12=-12$.

Γ) α) Παρατηρώ ότι $f\left(\sqrt{2}\right)=\left(\sqrt{2}\right)^3+9\sqrt{2}-24$ και $f\left(\sqrt{3}\right)=\left(\sqrt{3}\right)^3+9\sqrt{3}-30$.

$1<\sqrt{2}<\sqrt{3}<3 \overset{f \searrow [1,3]}{\Leftrightarrow} f\left(\sqrt{2}\right)>f\left(\sqrt{3}\right) \Leftrightarrow \left(\sqrt{2}\right)^3+9\sqrt{2}-24>\left(\sqrt{3}\right)^3+9\sqrt{3}-30$.

β) $3<\pi<\sqrt{17} \overset{f \nearrow [3,+\infty)}{\Leftrightarrow} f(\pi)<f\left(\sqrt{17}\right)$

γ) Παρατηρώ ότι $k=f\left(\frac{1}{\pi}\right)$ και $\ell=f\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)$.

$\pi<\sqrt{17} \Leftrightarrow 1>\frac{1}{\pi}>\frac{1}{\sqrt{17}} \overset{f \nearrow (-\infty,1]}{\Leftrightarrow} f\left(\frac{1}{\pi}\right)>f\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right) \Leftrightarrow k>\ell$