ΑΛΓΕΒΡΑ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ - ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

1ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ – ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

1. Τι ονομάζουμε συνάρτηση; (σελ. 9)
2. Ποιες συναρτήσεις λέγονται πραγματικές συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής; (σελ. 10)
3. Ποια είναι η ανεξάρτητη και ποια εξαρτημένη μεταβλητή μιας συνάρτησης; (σελ. 10)
4. Ποιες πράξεις με συναρτήσεις ορίζουμε; (σελ. 11)
5. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A. Τι ονομάζουμε γραφική παράσταση ή καμπύλη της f; (σελ. 11)
6. Τι ονομάζουμε εξίσωση της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f; (σελ. 11)
7. Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων: (σελ. 12)
   α) $f(x) = x$, β) $f(x) = x^2$, γ) $f(x) = \frac{1}{x}$, δ) $f(x) = συνx$ και ε) $f(x) = ημx$.
8. Πότε μια συνάρτηση f θα λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της; (σελ. 13)
9. Πότε μια συνάρτηση f θα λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της; (σελ. 13).
10. Πότε μια συνάρτηση λέγεται γνησίως μονότονη; (σελ. 13)
11. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A. Πότε η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1 \in A$; (σελ. 14)
12. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A. Πότε η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_2 \in A$; (σελ. 14)
13. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell_1 \in \mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \ell_2 \in \mathbb{R}$, να συμπληρώσετε τα κενά: (σελ. 16)
    $\lim\limits_{x\to x_0}\big(f(x)+g(x)\big) =$
    $\lim\limits_{x\to x_0}\big(kf(x)\big) =$
    $\lim\limits_{x\to x_0}\big(f(x)g(x)\big) =$
    $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) =$
    $\lim\limits_{x\to x_0}\big(f(x)\big)^{\nu} =$
    $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[\nu]{f(x)} =$
14. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A θα λέγεται συνεχής; (σελ. 16)
15. Ποιο χαρακτηριστικό γνώρισμα αφορά στη γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης; (σελ. 16)
16. Ποιες συναρτήσεις γνωρίζουμε ότι είναι συνεχείς; (σελ. 16)
17. Θεωρούμε συνάρτηση f, ένα σημείο $A\big(x_0, f(x_0)\big)$ της γραφικής της παράστασης C και ω η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη ε της C στο A. Από ποιον τύπο δίνεται ο συντελεστής διεύθυνσης $εφω$ της ε; (σελ. 19)
18. Έστω $x = f(t)$ η συνάρτηση που μας δίνει τη θέση ενός κινητού τη χρονική στιγμή t. Ποιος τύπος μας δίνει τη μέση ταχύτητα ενός κινητού κατά το χρονικό διάστημα t_0 έως $t_0 + h$, $h \neq 0$; (σελ. 21-22)
19. Έστω $x = f(t)$ η συνάρτηση που μας δίνει τη θέση ενός κινητού τη χρονική στιγμή t. Ποιος τύπος μας δίνει τη στιγμιαία ταχύτητα ενός κινητού τη χρονική στιγμή t_0; (σελ. 22)
20. Τι ονομάζεται παράγωγος μιας συνάρτησης f στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της; (σελ. 22)
21. Τι εκφράζει ο ρυθμός μεταβολής του $y = f(x)$ ως προς x, όταν $x = x_0$; (σελ. 23)

22. Να συμπληρώσετε τα κενά: (σελ. 23)
Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης που είναι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f στο σημείο $\left(x_0, f(x_0)\right)$ θα είναι ………………………, δηλαδή ο …………………………… ………………………………………… της $f(t)$ ως προς t όταν $t = \ldots\ldots\ldots$

Η ταχύτητα ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα και η θέση του στον άξονα κίνησής του εκφράζεται από τη συνάρτηση $x = f(t)$ θα είναι τη χρονική στιγμή t_0
………………………………………
δηλαδή ο ……………………………………………………………………………… της $f(t)$ ως προς t όταν $t = \ldots\ldots\ldots$

23. Υπάρχουν συναρτήσεις οι οποίες δεν έχουν παράγωγο σε ένα σημείο; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (σελ. 23)
24. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A και B το σύνολο των $x \in A$ στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη. Να ορίσετε τη συνάρτηση παράγωγο της f. (σελ. 27)
25. Ποιος τύπος μας δίνει την ταχύτητα ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα με τετμημένη κίνησης $x(t)$ τη χρονική στιγμή t όταν η συνάρτηση x είναι παραγωγίσιμη; (σελ. 27)
26. Ποιοι τύποι μας δίνουν την επιτάχυνση α ενός κινητού τη χρονική στιγμή t που κινείται ευθύγραμμα με τετμημένη κίνησης $x(t)$ όταν η συνάρτηση της ταχύτητας υ είναι παραγωγίσιμη; (σελ. 28)
27. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης $f(x) = c$ είναι μηδέν. (σελ. 28)
28. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης $f(x) = x$ ισούται με τη μονάδα. (σελ. 28)
29. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = x^2$ ισούται με $2x$. (σελ. 28-29)
30. Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση και c μια σταθερά. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης $cf(x)$ ισούται με $cf'(x)$. (σελ. 30)
31. Έστω f, g παραγωγίσιμες συναρτήσεις. Να αποδείξετε ότι $\left(f(x) + g(x)\right)' = f'(x) + g'(x)$. (σελ. 31)
32. Να συμπληρώσετε τις ισότητες: (σελ. 33)
$(c)' =$
$(x)' =$
$(x^\rho)' =$
$\left(\sqrt{x}\right)' =$
$(\eta\mu x)' =$
$(\sigma\upsilon\nu x)' =$
$(\varepsilon\varphi x)' =$
$\left(cf(x)\right)' =$
$\left(f(x) + g(x)\right)' =$
$\left(f(x)g(x)\right)' =$
$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' =$
$\left(f\left(g(x)\right)\right)' =$
$\left(\left(f(x)\right)^\rho\right)' =$
$\left(\sqrt{f(x)}\right)' =$
$\left(\eta\mu f(x)\right)' =$

$\left(\sigma\upsilon\nu f(x)\right)' =$
$\left(\varepsilon\varphi f(x)\right)' =$

33. Να συμπληρώσετε τα κενά: (σελ. 41)
Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει ……,
τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει ……,
τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.

Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν ……………………………………………………………………………
……,
τότε η f παρουσιάζει στο διάστημα (α, β) για $x = x_0$ μέγιστο.

Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν ……………………………………………………………………………
……,
τότε η f παρουσιάζει στο διάστημα (α, β) για $x = x_0$ ελάχιστο.

Αν για τη συνάρτηση f ισχύει ……………………………………………………………………………
……,
τότε η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β) και δεν παρουσιάζει ακρότατα στο διάστημα αυτό.

2ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ - ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

1. Τι ονομάζουμε πληθυσμό και τι μεταβλητές στη Στατιστική; (σελ. 58)
2. Πως διακρίνουμε τις μεταβλητές; (σελ. 58)
3. Ποια μέθοδος συλλογής δεδομένων καλείται απογραφή; (σελ. 59)
4. Τι ονομάζουμε δείγμα και πότε χρησιμοποιείται; (σελ. 59-60)
5. Πότε ένα δείγμα είναι αντιπροσωπευτικό; (σελ. 60)
6. Πως διακρίνονται οι στατιστικοί πίνακες; (σελ. 62)
7. Τι πρέπει να περιέχει κάθε στατιστικός πίνακας για να έχει κατασκευαστεί σωστά; (σελ. 62)
8. Υποθέτουμε ότι $x_1, x_2, \dots, x_\kappa$ είναι οι τιμές μιας μεταβλητής X, που αφορά στα άτομα ενός δείγματος μεγέθους ν, $\kappa \le \nu$. Τι ονομάζουμε συχνότητα ν_i της τιμής x_i; (σελ. 65)
9. Υποθέτουμε ότι $x_1, x_2, \dots, x_\kappa$ είναι οι τιμές μιας μεταβλητής X, που αφορά στα άτομα ενός δείγματος μεγέθους $\nu, \kappa \le \nu$. Τι ονομάζουμε σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i; (σελ. 65)
10. Να εξηγήσετε για ποιον λόγο για τη σχετική συχνότητα f_i ισχύει: $0 \le f_i \le 1$, για $i = 1,2, \dots, \kappa$. (σελ. 65)
11. Να αποδείξετε ότι για τη σχετική συχνότητα f_i ισχύει: $f_1 + f_2 + \dots + f_\kappa = 1$. (σελ. 65)
12. Έστω $x_1, x_2, \dots, x_\kappa$ είναι οι τιμές μιας μεταβλητής X, που αφορά στα άτομα ενός δείγματος μεγέθους ν, $\kappa \le \nu$. Τι ονομάζουμε αθροιστική συχνότητα N_i και σε ποια περίπτωση μεταβλητών χρησιμοποιείται; (σελ. 66)
13. Έστω $x_1, x_2, \dots, x_\kappa$ είναι οι τιμές μιας μεταβλητής X, που αφορά στα άτομα ενός δείγματος

μεγέθους ν, $\kappa \leq \nu$. Τι ονομάζουμε αθροιστική σχετική συχνότητα F_i και σε ποια περίπτωση μεταβλητών χρησιμοποιείται; (σελ. 66)

14. Να συμπληρώσετε τα κενά: (σελ. 65,67)
$N_1 =$
$N_2 - N_1 =$
$N_\kappa - N_{\kappa-1} =$
$F_1 =$
$F_2 - F_1 =$
$F_\kappa - F_{\kappa-1} =$
$N_\kappa =$
$F_\kappa =$
15. Τι ονομάζουμε ραβδόγραμμα συχνοτήτων, τι ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων και σε ποια περίπτωση μεταβλητών χρησιμοποιούνται; (σελ. 67)
16. Τι ονομάζουμε διάγραμμα συχνοτήτων, τι διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων και σε ποια περίπτωση μεταβλητών χρησιμοποιούνται; (σελ. 67)
17. Πως κατασκευάζουμε το πολύγωνο συχνοτήτων και πως το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων; (σελ. 69)
18. Σε ποιες περιπτώσεις μεταβλητών χρησιμοποιούμε το κυκλικό διάγραμμα; Να περιγράψετε τη διαδικασία κατασκευής του. (σελ. 70)
19. Πότε χρησιμοποιούμε ομαδοποίηση παρατηρήσεων; Να περιγράψετε τα βήματα ομαδοποίησης των παρατηρήσεων, καθώς και τι πρέπει να προσέξουμε κατά την κατασκευή τους. Δεν χρειάζεται να γράψετε αναλυτικά τον πίνακα οδηγό που μας δίνει τον αριθμό των κλάσεων. (σελ. 71-73)
20. Πως κατασκευάζουμε το ιστόγραμμα συχνοτήτων και πως το πολύγωνο συχνοτήτων; (σελ. 73-74)
21. Τι ισχύει για το εμβαδόν του πολυγώνου συχνοτήτων και τι για το εμβαδόν του πολυγώνου σχετικών συχνοτήτων; (σελ. 74)
22. Πως προκύπτει η καμπύλη συχνοτήτων; Να σχεδιάσετε μια ομοιόμορφη κατανομή, μια κανονική κατανομή, μια κανονική κατανομή με θετική ασυμμετρία και μια κανονική κατανομή με αρνητική ασυμμετρία. (σελ. 76)
23. Τι ονομάζουμε μέτρα θέσεις, τι μέτρα διασποράς και τι μέτρα ασυμμετρίας στη Στατιστική; (σελ. 84)
24. Ποια μέτρα θέσεις και ποια μέτρα διασποράς γνωρίζετε; Να τα αναφέρετε ονομαστικά. (§2.3)
25. Θεωρούμε ένα δείγμα παρατηρήσεων $t_1, t_2, \dots, t_\nu$ μιας μεταβλητής X. Να ορίσετε τη μέση τιμή των παρατηρήσεων αυτών. (σελ. 85)
26. Πως ορίζεται η μέση τιμή των τιμών $x_1, x_2, \dots, x_\kappa$ μιας μεταβλητής X με αντίστοιχες συχνότητες τις $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_\kappa$ σε μια κατανομή συχνοτήτων; (σελ. 85)
27. Να αποδείξετε ότι σε μια κατανομή συχνοτήτων με τιμές $x_1, x_2, \dots, x_\kappa$ και με αντίστοιχες σχετικές συχνότητες τις $f_1, f_2, \dots, f_\kappa$ ισχύει (σελ. 85)
$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{\kappa} x_i f_i$$
28. Τι είναι ο σταθμικός μέσος και πότε χρησιμοποιείται; (σελ. 86-87)
29. Να ορίσετε τη διάμεσο ενός δείγματος ν παρατηρήσεων. (σελ. 87)
30. Σε τι υπερτερεί η διάμεσος έναντι της μέσης τιμής; (σελ. 87)
31. Πως βρίσκουμε τη διάμεσο σε ομαδοποιημένα δεδομένα; (σελ. 88)
32. Πως ορίζεται το εύρος; (σελ. 92)

33. Έστω $t_1, t_2, \ldots, t_\nu$ οι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής X. Αν από κάθε παρατήρηση αφαιρέσουμε τη μέση τιμή τους, να αποδείξετε ότι ο αριθμητικός μέσος των διαφορών αυτών είναι ίσος με το μηδέν. (σελ. 93)
34. Να ορίσετε την τυπική απόκλιση ή διασπορά των παρατηρήσεων $t_1, t_2, \ldots, t_\nu$ μιας μεταβλητής X. (σελ. 93, τύπος 1)
35. Από ποιον τύπο ορίζεται η διακύμανση στην περίπτωση που έχουμε πίνακα συχνοτήτων ή ομαδοποιημένα δεδομένα; (σελ. 93, τύπος 3)
36. Τι λέγεται τυπική απόκλιση και σε τι πλεονεκτεί έναντι της διακύμανσης; (σελ. 95)
37. Ποιες ιδιότητες έχει η τυπική απόκλιση όταν η καμπύλη συχνοτήτων είναι κανονική ή περίπου κανονική; (σελ. 95)
38. Με τι ισούται η διάμεσος στην κανονική κατανομή; (Απ: Με τη μέση τιμή)
39. Πως ορίζεται ο συντελεστής μεταβολής ή μεταβλητότητας, γιατί τον χρησιμοποιούμε και τι χαρακτηριστικά έχει; (σελ. 96)
40. Πότε ένα δείγμα τιμών μιας μεταβλητής είναι ομοιογενές; (σελ. 97)
41. Έστω $x_1, x_2, \ldots, x_\kappa$ είναι οι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής X με μέση τιμή $\bar{x}$ και τυπική απόκλιση s_x. Ποια θα είναι η νέα μέση τιμή και ποια η νέα τυπική απόκλιση αν προσθέσουμε σε κάθε παρατήρηση μια σταθερά c; (σελ. 99)
42. Έστω $x_1, x_2, \ldots, x_\kappa$ είναι οι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής X με μέση τιμή $\bar{x}$ και τυπική απόκλιση s_x. Ποια θα είναι η νέα μέση τιμή και ποια η νέα τυπική απόκλιση αν πολλαπλασιάσουμε κάθε παρατήρηση με μια σταθερά c; (σελ. 99)
43. Ποια τα πλεονεκτήματα και ποια τα μειονεκτήματα της μέσης τιμής;

    Απάντηση

Πλεονεκτήματα	**Μειονεκτήματα**
Μέση τιμή	
• Για τον υπολογισμό της χρησιμοποιούνται όλες οι τιμές	• Επηρεάζεται πολύ από ακραίες τιμές
• Είναι μοναδική για κάθε σύνολο δεδομένων	• Μπορεί να μην αντιστοιχεί σε δυνατή τιμή της μεταβλητής. Όταν η Χ είναι διακριτή, με ακέραιες τιμές, τότε η μέση τιμή μπορεί να μην είναι ακέραιος
• Είναι εύκολα κατανοητή	• Δεν υπολογίζεται για ποιοτικά δεδομένα
• Ο υπολογισμός της είναι σχετικά εύκολος	
• Έχει μεγάλη εφαρμογή για περαιτέρω στατιστική ανάλυση	

44. Ποια τα πλεονεκτήματα και ποια τα μειονεκτήματα της διαμέσου;

    Απάντηση

Πλεονεκτήματα	**Μειονεκτήματα**
Διάμεσος	
• Είναι εύκολα κατανοητή	• Δε χρησιμοποιούνται όλες οι τιμές για τον υπολογισμό της

• Δεν επηρεάζεται από ακραίες τιμές	• Είναι δύσκολη η εφαρμογή της για περαιτέρω στατιστική ανάλυση
• Υπολογίζεται και στην περίπτωση που οι ακραίες κλάσεις είναι ανοικτές	• Δεν υπολογίζεται για ποιοτικά δεδομένα
• Ο υπολογισμός της είναι απλός	• Για τον υπολογισμό της μπορεί να χρειαστεί παρεμβολή
• Είναι μοναδική σε κάθε σύνολο δεδομένων	

45. Ποια τα πλεονεκτήματα και ποια τα μειονεκτήματα του εύρους;
Απάντηση

Πλεονεκτήματα	**Μειονεκτήματα**
Εύρος	
• Είναι πολύ απλό στον υπολογισμό	• Δεν θεωρείται αξιόπιστο μέτρο διασποράς, επειδή βασίζεται μόνο στις δυο ακραίες παρατηρήσεις.
• Χρησιμοποιείται αρκετά στον έλεγχο ποιότητας	• Δεν χρησιμοποιείται για περαιτέρω στατιστική ανάλυση

46. Ποια τα πλεονεκτήματα και ποια τα μειονεκτήματα της διασποράς και της τυπικής απόκλισης;
Απάντηση

Πλεονεκτήματα	**Μειονεκτήματα**
Διασπορά και τυπική απόκλιση	
• Λαμβάνονται υπόψη για τον υπολογισμό τους όλες οι παρατηρήσεις	• Το κυριότερο μειονέκτημα της διασποράς είναι ότι δεν εκφράζεται στις ίδιες μονάδες με το χαρακτηριστικό. Το μειονέκτημα αυτό παύει να υπάρχει με τη χρησιμοποίηση της τυπικής απόκλισης
• Έχουν μεγάλη εφαρμογή στη στατιστική συμπερασματολογία	• Απαιτούνται περισσότερες αλγεβρικές πράξεις για τον υπολογισμό τους παρά στα άλλα μέτρα.
• Σε κανονικούς πληθυσμούς το πλήθος των παρατηρήσεων που βρίσκονται στα διαστήματα $\bar{x} \pm s$, $\bar{x} \pm 2s$ και $\bar{x} \pm 3s$ προσεγγίζουν το 68%, 95%, 99,7% αντίστοιχα	

47. Ποια τα πλεονεκτήματα και ποια τα μειονεκτήματα του συντελεστή μεταβολής;
Απάντηση

Πλεονεκτήματα	Μειονεκτήματα
Συντελεστής μεταβολής	
• Είναι καθαρός αριθμός (ποσοστό)	• Δεν ενδείκνυται στην περίπτωση που η μέση τιμή είναι κοντά στο μηδέν
• Χρησιμοποιείται ως μέτρο σύγκρισης της μεταβλητότητας, όταν έχουμε ίδιες ή και διαφορετικές μονάδες μέτρησης.	
• Χρησιμοποιείται ως μέτρο ομοιογένειας ενός πληθυσμού	